L2 PC
Math 3, TD 6

Exercice 1

Soit la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer et factoriser le polynôme caractéristique de A.
2. Démontrer que A est diagonalisable et déterminer une matrice D diagonale et une matrice P inversible telles que $A = PDP^{-1}$.
3. Donner en le justifiant, mais sans calcul, le polynôme minimal de A (polynôme unitaire qui annule A et est de degré minimal).
4. Calculer A^n pour $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 2

Soit $P(X)$ un polynôme de $\mathbb{C}[X]$, soit A une matrice de $M_n(\mathbb{C})$. On note B la matrice : $B = P(A) \in M_n(\mathbb{C})$.
1. Dénmontrer que si x est un vecteur propre de A de valeur propre λ, alors x est un vecteur propre de B de valeur propre $P(\lambda)$.
2. Le but de cette question est de démontrer que les valeurs propres de B sont toutes de la forme $P(\lambda)$, avec λ valeur propre de A. Soit $\mu \in \mathbb{C}$ on décompose le polynôme $P(X) - \mu$ en produit de facteurs de degré 1 : $P(X) - \mu = a(X - \alpha_1) \dots (X - \alpha_r)$.
(a) Démontrer que $det(B - \mu I_n) = a_n det(A - \alpha_r I_n) \dots det(A - \alpha_r I_n)$.
(b) En déduire que si μ est valeur propre de B, alors il existe une valeur propre λ de A telle que $\mu = P(\lambda)$.

Exercice 3

Soit A la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

1. Calculer le polynôme caractéristique de A.
2. Calculer les valeurs propres et les espaces propres associés.
3. Trouver une patrice $P \in GL_3(\mathbb{R})$ telle que $P^{-1}AP$ soit diagonale.
4. Calculer A^{25}.
5. Calculer A^{-1} en utilisant le théorème de Cayley-Hamilton.
6. Résoudre $AX = B$ pour $B = (1, 2, 3)^t$.

Exercice 4

Trouver le polynôme caractériqstique les valeurs propres et les espaces propres de la matrice $A \in M_3(\mathbb{R})$ et diagonaliser la si possible.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$